

Développements de fonctions D-finies sur des polynômes de Tchebychev

Alexandre Benoit,
Directeur de stage : Bruno Salvy

Laboratoire commun Inria-Microsoft Research

9 Septembre 2008

I Introduction

Séries de Tchebychev

Représentation d'une fonction analytique f .

En série de Taylor :

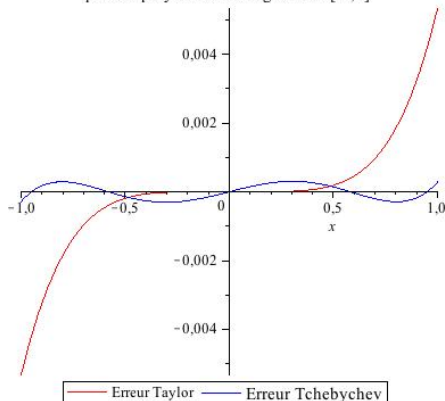
$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

ou de Tchebychev :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n T_n(x),$$

$$t_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 T_n(t) \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Calcul de l'erreur pour l'approximation de $\arctan(x/2)$ par des polynômes de degré 3 sur $[-1,1]$



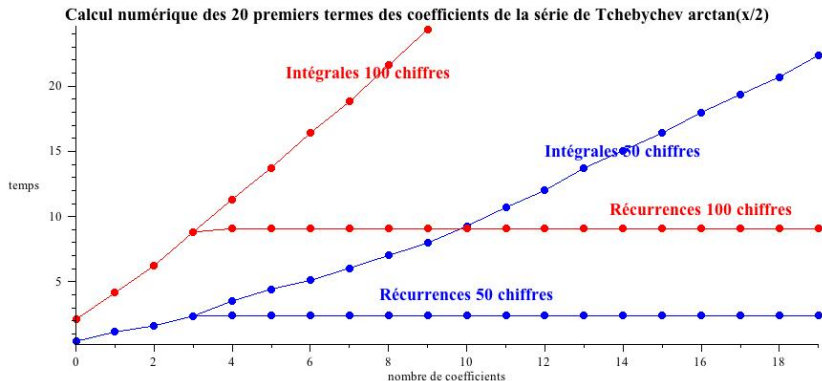
Problème: Calcul efficace des t_n quand f est D-finie

Le calcul numérique d'intégrales est très coûteux. La notion de D-finitude permet d'utiliser d'autres propriétés.

Récurrence

Proposition (Classique)

Les coefficients d'une série de Tchebychev solution d'une équation différentielle linéaire vérifient une récurrence linéaire.



Exemple avec $\arctan(x/2) \rightarrow (4 + x^2)y'' + 2xy'$

Récurrence

Proposition (Classique)

Les coefficients d'une série de Tchebychev solution d'une équation différentielle linéaire vérifient une récurrence linéaire.

Objectif du stage

Calculer efficacement la récurrence de Tchebychev à partir d'une équation différentielle linéaire.

Contributions

- Étude théorique du problème
- Nouvel algorithme efficace
- Implantation sur maple

```

-> read("/Users/benoit/document/corpsOre2beta.mpl");
-> Paszkowskibinaire((4+x^2)*D^2+2*x*D,[x,D],t(n));
      n t(n) + (36 + 18 n) t(n+2) + (n+4) t(n+4) = 0
-> r:=rsolve({%,t(0)=0,t(1)=2*sqrt(5)-4,t(2)=0,t(3)=(-2/3)*(sqrt(5)-2)^3},t(n))
-> simplify(evalc(allvalues(subs(n=n,r)))) assuming n::integer;

```

$$\begin{cases} 0 & \underline{n} = 0 \\ \frac{2(\sqrt{5}-2)^{n+1}(\sqrt{5}+2)\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)}{n} & \text{otherwise} \end{cases}$$

II Opérateurs de récurrences

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Série de Taylor ($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$

$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n , $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4+x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1) (4(n+2)S^2 + n)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Série de Taylor ($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$

$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n , $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4 + x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4 + S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1) (4(n+2)S^2 + n)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Série de Taylor ($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$

$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n , $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} & (4+x^2) \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x \frac{d}{dx} \\ \mapsto & (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S \\ & = (n+1)(4(n+2)S^2 + n) \\ & 4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0 \end{aligned}$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Série de Taylor ($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$

$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n , $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4 + x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4 + S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1)(4(n+2)S^2 + n)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Base monomiale $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$

$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

Série de Tchebychev

$$xT_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2},$$

$$T_n'(x) = \frac{n(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n , $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$x \mapsto X := \frac{S + S^{-1}}{2},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$(4+x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1)(4(n+2)S^2 + n)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2})}{((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2})},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Base monomiale $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$

$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n , $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4+x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1)(4(n+2)S^2 + n)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Série de Tchebychev

$$xT_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2},$$

$$T_n'(x) = \frac{n(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}$$

$$x \mapsto X := \frac{S+S^{-1}}{2},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$\frac{(n-1)(n+1)((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2})}{((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2})},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Base monomiale $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$

$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n , $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

Série de Tchebychev

$$xT_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2},$$

$$T_n'(x) = \frac{n(T_{n-1}(x) \stackrel{2}{=} T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := \frac{S + S^{-1}}{2},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$(4+x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1)(4(n+2)S^2 + n)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2})}{((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2})},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Base monomiale $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$

$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

Série de Tchebychev

$$xT_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2},$$

$$T_n'(x) = \frac{n(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n , $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$x \mapsto X := \frac{S + S^{-1}}{2},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$(4+x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1)(4(n+2)S^2 + n)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2})}{((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2})},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Fractions d'opérateurs de récurrence (Ore 1933)

Opérateurs de récurrence

On représente un opérateur P de récurrence en S et n , par: $P = \sum_{i=0}^k p_i(n)S^i$,

avec la commutation $Sn = (n+1)S$.

L'anneau des opérateurs de récurrence est euclidien.

Corps des fractions de récurrence

Cette anneau possède un corps des fractions avec l'égalité:

$$B^{-1}A = \frac{A}{B} = \frac{UA}{UB}.$$

Par l'algorithme d'Euclide étendue, on peut construire un ppcm_g (à gauche) P entre B et D ($P = UB = VD$).

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{UA}{UB} + \frac{VC}{VD} = \frac{UA + VC}{P},$$

$$\frac{D}{C} \cdot \frac{A}{B} = \frac{VD}{VC} \cdot \frac{UA}{UB} = \frac{P}{VC} \cdot \frac{UA}{P} = \frac{UA}{VC}.$$

On peut réduire la fraction $\frac{A}{B}$ de manière **irréductible** tel que $\text{pgcd}_g(A, B) = 1$

III Calcul de la récurrence de Tchebychev

Mon interprétation des stratégies existantes

Algorithmes du calcul des récurrences

$$\text{Entrée : } \sum_{i=0}^k p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \quad X := \frac{S+S^{-1}}{2}, \quad D^{-1} = \frac{S^{-1}-S}{2n}.$$

$$\text{Sortie : } L := \sum_{i=0}^k p_i(X) D^i = \frac{D^{-k} \sum_{i=0}^k p_i(X) D^i}{D^{-k}} = \frac{A}{B} \text{ où } \text{pgcd}(A, B) = 1.$$

Paszkowski (1975)

Calcul $D^{-k} \sum_{i=0}^k p_i(X) D^i$.

Calculer les $q_i(x)$ tel que

$$\sum_{i=0}^k p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i = \sum_{i=0}^k \left(\frac{d}{dx}\right)^i q_i(x).$$

$$\leftrightarrow \frac{\sum_{i=0}^k D^{-k+i} q_i(X)}{D^{-k}}.$$

Lewanowicz (1976)

Calcul de A

Calculer les $p_i(X)$. Calculer la fraction de récurrence

$$\sum_{i=0}^k p_i(X) D^i.$$

Renvoyer le numérateur irréductible.

Rebillard (1998)

Calcul $D^{-k} \sum_{i=0}^k p_i(X) D^i$

$$X_k := D^{-k} X D^k.$$

$$\sum_{i=0}^k p_i(X) D^i =$$

$$\frac{\sum_{i=0}^k p_i(X_k) D^{-k+i}}{D^{-k}}.$$

Mon nouvel algorithme

Paszkowski + Diviser pour régner

Étape 1: Calcul des $q_i(X)$ tel que

$$\sum_{i=0}^k p_i(X) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \leftrightarrow \sum_{i=0}^k \left(\frac{d}{dx}\right)^i q_i(X).$$

Étape 2 : Diviser pour regner

$$\sum_{i=0}^k D^{-k+i} q_i(X)$$

$$= D^{-\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} D^{-\frac{k}{2}+i} q_i(X) + \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k D^{-k+i} q_i(X).$$

Si $k = d$, la complexité des algorithmes existants est de $O(k^4)$ opérations arithmétiques.
La complexité du nouvel algorithme est de $O(k^\omega)$ opérations, avec $2 \leq \omega \leq 3$.

Théorème (Benoit 2008)

Si l'entrée est une équation différentielle linéaire d'ordre k et dont les polynômes sont de degrés d .

- La complexité arithmétique des algorithmes de Paszkowski, Lewanowicz et Rebillard est de $O(dk^3)$ opérations.
- La complexité arithmétique du nouvel algorithme est de $O((d+k)^\omega)$ opérations.

Mon nouvel algorithme

Paszkowski + Diviser pour régner

Étape 1: Calcul des $q_i(X)$ tel que

$$\sum_{i=0}^k p_i(X) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \leftrightarrow \sum_{i=0}^k \left(\frac{d}{dx}\right)^i q_i(X).$$

Étape 2 : Diviser pour regner

$$\sum_{i=0}^k D^{-k+i} q_i(X)$$

$$= D^{-\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} D^{-\frac{k}{2}+i} q_i(X) + \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k D^{-k+i} q_i(X).$$

Preuve Soit $C(k, d)$, le coût pour calculer l'opérateur de récurrence de Tchebychev. On a l'égalité $C(k, d) = 2C(\frac{k}{2}, d) + O((k+d)^\omega)$. Ce qui donne $C(k, d) = O((k+d)^\omega)$. □

Théorème (Benoit 2008)

Si l'entrée est une équation différentielle linéaire d'ordre k et dont les polynômes sont de degrés d .

- La complexité arithmétique des algorithmes de Paszkowski, Lewanowicz et Rebillard est de $O(dk^3)$ opérations.
- La complexité arithmétique du nouvel algorithme est de $O((d+k)^\omega)$ opérations.

IV Minimalité

Minimalité

Theorème (Lewanowicz)

L'algorithme de Paszkowski renvoie l'opérateur de récurrence d'ordre minimal si et seulement si $\text{pgcd}((1-x^2), p_k(x)) = 1$.

$$D = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$1 - X^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}S^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}S^{-2} \right) = \frac{1}{4}(S^{-1} - S)^2.$$

Exemple $(x(1-x^2)y'' - (1+2x-2x^3)y' + 1+x)$

> **LewanowiczOre**($x*(1-x^2)*D^2 - (1+2*x-2*x^3)*D + 1+x$, [x, D], t(n));

$$-n t(n) - 2 t(n+2) + (n+4) t(n+4) + (7n+n^2+11) t(n+3) + (n^2-1+n) t(n+1) = 0$$

> **Paszkowski**($x*(1-x^2)*D^2 - (1+2*x-2*x^3)*D + 1+x$, [x, D], t(n));

$$\begin{aligned} &(-5n-n^2) t(n) + (15-6n^2-4n-n^3) t(n+3) + (6+2n^2+10n) t(n+2) + (6n+24) t(n+4) + (18n^2 \\ &+ 100n+165+n^3) t(n+7) + (n^2+11n+24) t(n+8) + (n^3+4n-5+6n^2) t(n+1) + (-22n-2n^2 \\ &- 54) t(n+6) + (-n^3-100n-175-18n^2) t(n+5) = 0 \end{aligned}$$

Mon algorithme rapide et minimal

Rec Min

Entrée $(q_1 \dots q_k)$

Sortie La récurrence de Tchebychev

- Si $\text{pgcd}_g(q_i, D) = 1$
Renvoyer `Paszkowskibinaire` $(q_1 \dots q_k)$

- Sinon

$$q_{k-1} := \frac{q_k}{D} + q_{k-1}$$

$$k := k - 1$$

Renvoyer `Rec Min` $(q_1 \dots q_k)$.

Exemple $(x(1-x^2)y'' - (1+2x-2x^3)y' + 1+x)$

```
> LewanowiczOre(x*(1-x^2)*D^2-(1+2*x-2*x^3)*D+1+x, [x,D], t(n));
```

$$-n t(n) - 2 t(n+2) + (n+4) t(n+4) + (7n+n^2+11) t(n+3) + (n^2-1+n) t(n+1) = 0$$

```
> Paszkowskibinaire(x*(1-x^2)*D^2-(1+2*x-2*x^3)*D+1+x, [x,D], t(n));
```

$$-n t(n) - 2 t(n+2) + (n+4) t(n+4) + (7n+n^2+11) t(n+3) + (n^2-1+n) t(n+1) = 0$$

V Conclusion

Contributions

- Utilisation de **fractions d'opérateurs de récurrences**: clarification et simplification des algorithmes et des preuves existantes.
- Construction d'un opérateur de récurrence de Tchebychev en $O((k+d)^\omega)$ opérations arithmétiques ($2 \leq \omega \leq 3$).
- Algorithme hybride efficace pour calculer l'opérateur de récurrence d'ordre minimal.
- Code Maple (700 lignes).

Perspectives

- Calcul des premiers coefficients de la série de Tchebychev.
- Calcul des récurrences dans d'autres bases de fonctions (les polynômes de Jacobi, Legendre, Laguerre et les fonctions de Bessel).
- Intégration du code dans le Dynamic Dictionary of Mathematical Functions au laboratoire commun Inria-Microsoft Research.